APLICACIONES DE LOS SISTEMAS LINEALES

1. MODELACION DE POLINOMIOS CONOCIENDO UN NUMERO DETERMINADO DE PUNTOS DEL PLANO.

Dado un numero n de puntos del plano (a , b) es posible encontrar una función polinómica de grado n-1 , $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots \ldots + a_1x + a_0$ que los contenga a todos , para ellos si f(x) es la función polinomica entonces cada punto del plano dado lo interpretamos como f(x)= b, con lo cual obtenemos un sistema lineal cuyas variables son los coeficientes del polinomio.

En general ;

Numero de puntos del plano conocidos	Obtenemos una función polinomica de grado	Cuya forma general es:
2	1	$f(x) = a_1x + a_0$
3	2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
4	3	$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
n+1	n	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots + a_1x + a_0$

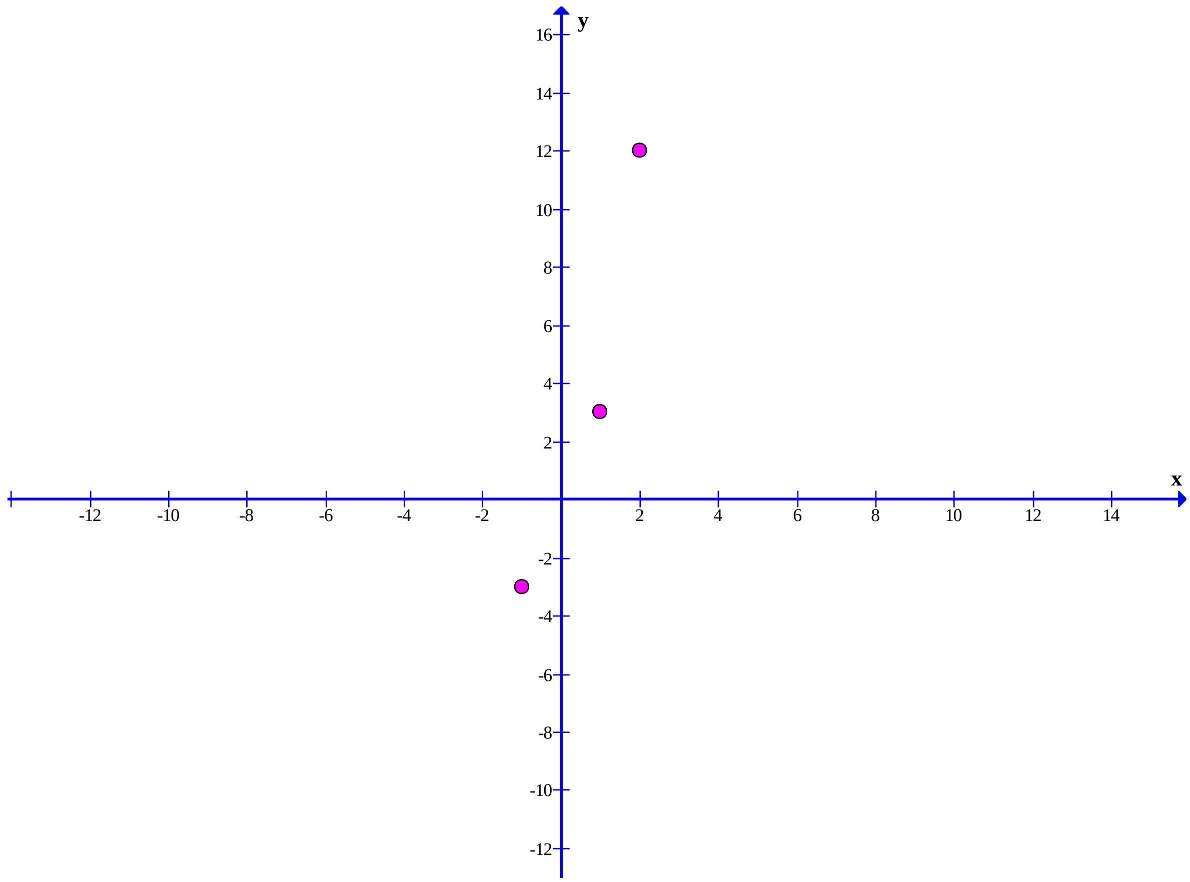
Por ejemplo. Determine la función polinomica que contiene los puntos (1 , 3) ; (2 , 12) ; (-1 , -3)

Como se conocen tres puntos, se debe encontrar una función polinomica de segundo grado, es decir de la forma:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Para determinar los valores de los coeficientes, tenemos en cuanta que:

puntos del plano conocidos	Se interpreta como	Con lo que obtenemos
(1 , 3)	f(1)=3	$f(1) = a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0$
(2 , 12)	f(2)=12	$f(2) = a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0$
(-1 , -3)	f(-1)=-3	$f(-1) = a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0$



Al desarrollar las potencias y reemplazar el valor de la función en cada valor de x, se tiene el sistema lineal:

$$a_2 + a_1 + a_0 = 3$$

$$4a_2 + 2a_1 + a_0 = 12$$

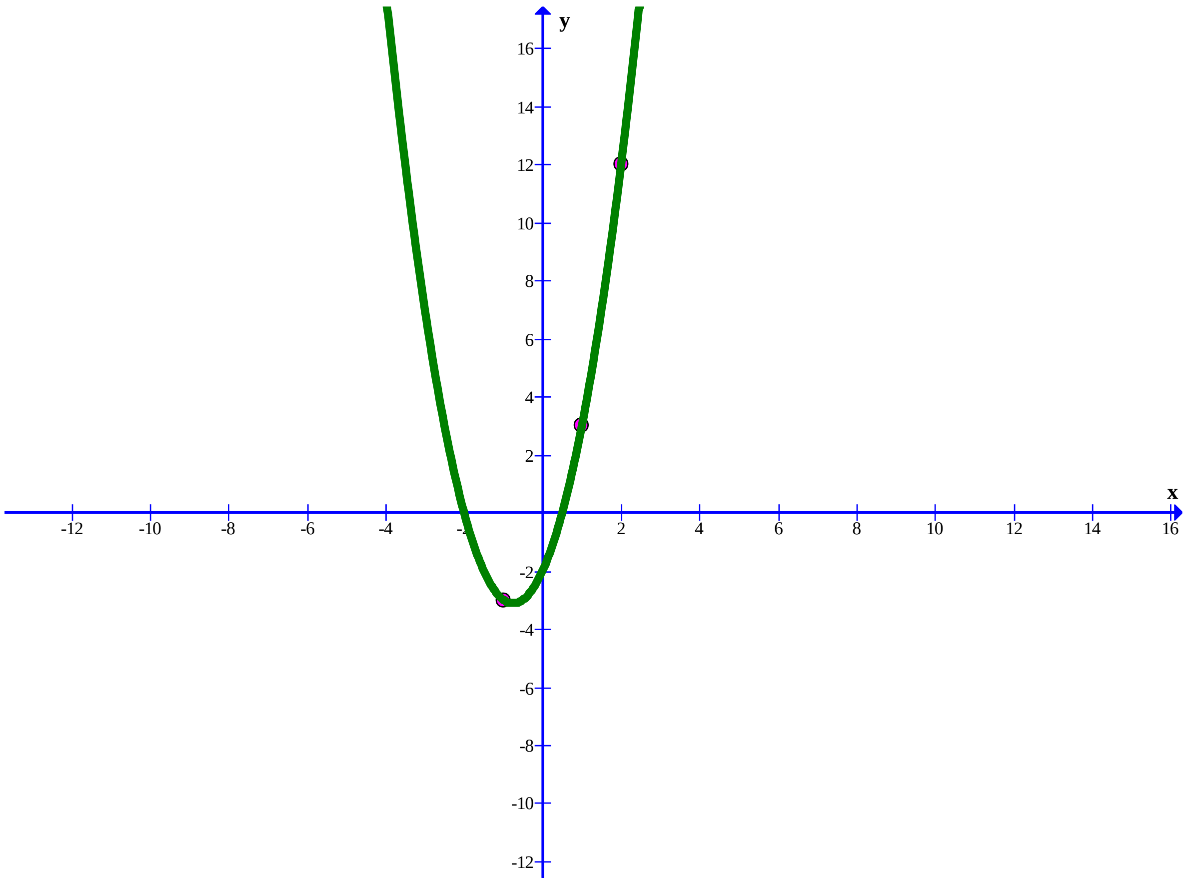
$$a_2 - a_1 + a_0 = -3$$

Resolviendo , el sistema lineal obtenemos como coeficientes del polinomio:

$$a_2 = 2;\ a_1 = 3\ ;\ a_0 = -2$$

Y la función polinomica buscada es:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$



ACTIVIDAD.

1.) Determine la función polinomica que contiene los puntos del plano:

a) (-2 , -28) ; (1 , 2) ; (2 , 0) ; (-1 , -6)

b) (-2, 37) ; (-1,3) , (3 , 7) ; (1 , 1) ; (2 , -3)

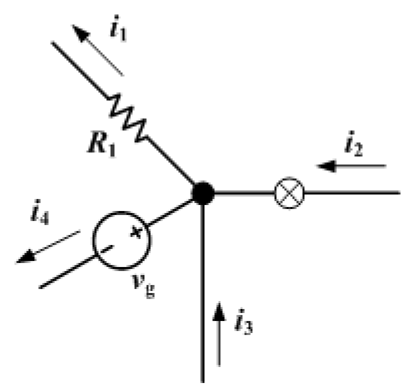
c) (-2, -1/3) ; (-1, -1/6) ; (3 , 13/3) ; (3, 41/2)

2. DETERMINACION DE CORRIENTES EN CIRCUITOS ELECTRICOS

Las **leyes de Kirchhoff** son dos igualdades que se basan en la conservación de la energía y la carga en los circuitos eléctricos. Fueron descritas por primera vez en 1845 por Gustav Kirchhoff. Son ampliamente usadas en ingeniería eléctrica.

LEY DE LOS NODOS.

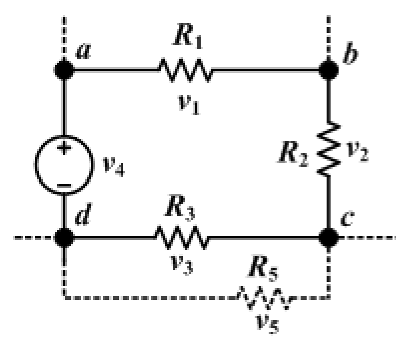
En cualquier nodo, la suma de la corriente que entra en ese nodo es igual a la suma de la corriente que sale. De igual forma, La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero



$$\sum_{k=1}^{n} i_k = i_1 + i_2 + \cdots \ldots . + i_n = 0$$

LEY DE LAS MALLAS:

En toda malla la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, En toda malla la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a 0.



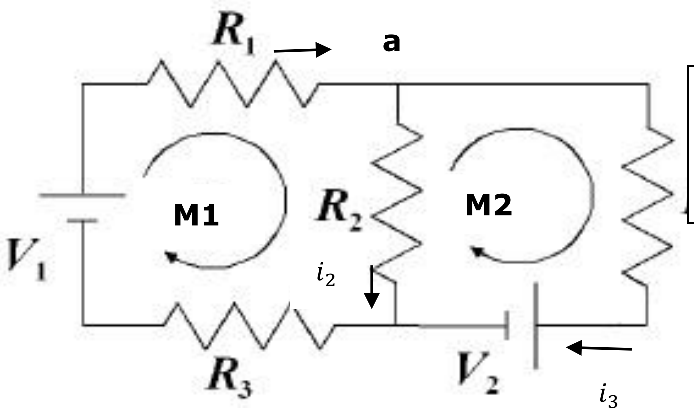
$$\sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 + V_2 + V_3 \ldots + V_n = 0$$

Regla de signos:

A. Al pasar a través de una fuente de poder del terminal positivo al negativo se considera positivo la f.e.m
B. Al pasar a través de una fuente de poder del terminal negativo al positivo se considera negativa la f.e.m
C. Al pasar a través de un resistor en la dirección del recorrido de la malla, el voltaje en ese resistor es positivo
D. Al pasar a través de un resistor en sentido contrario ala dirección de recorrido de la malla, el voltaje en ese resistor es negativo.

Ejemplo. Determine las corrientes en el siguiente circuito.

i_1



R1=8Ω ; R2=10Ω ; R3=6Ω ; R4=12Ω

V1=12Volt V2= 10Volt

Aplicando la ley de los nodos, en el punto a, observamos que entra la corriente 1 y salen las corrientes 2 y 3, es decir

$$i_1 = i_2 + i_2$$

Aplicamos ahora la ley de las mallas. Partimos del punto a en el sentido que se indica.

Malla 1) Partiendo de a, atravesamos la resistencia R1 en el sentido de la corriente, luego el voltaje a través de ella es positivo; luego la resistencia dos en el mismo sentido de la corriente, la fuente la recorremos del polo negativo al positivo y por ultimo la resistencia 1 en el mismo sentido de la corriente. Luego

$$V_{R_2+}V_{R_3} + V_1 + V_{R_1} = 0$$

$$i_2R_2 + i_1R_3 + V_1 + i_1R_1 = 0$$

$$10i_2 + 6i_1 - 12 + 8i_1R_1 = 0$$

$$14i_1 + 10i_2 = 12$$

Malla 2) Partiendo de **a**, atravesamos la resistencia R4 en el sentido de la corriente, la fuente la recorremos del polo positivo al negativo y por ultimo la resistencia R2 en el sentido contrario al de la corriente. Luego

$$V_{R_4} + V_2 + V_{R_2} = 0$$

$$i_3 R_4 + V_2 + i_2 R_2 = 0$$

$$12 i_3 + 10 - 10 i_2 = 0$$

$$-10 i_2 + 12 i_3 = -10$$

Luego tenemos el sistema lineal, en el cual las variables son las corrientes:

$$i_1 - i_2 - i_2 = 0$$

$$14 i_1 + 10 i_2 = 12$$

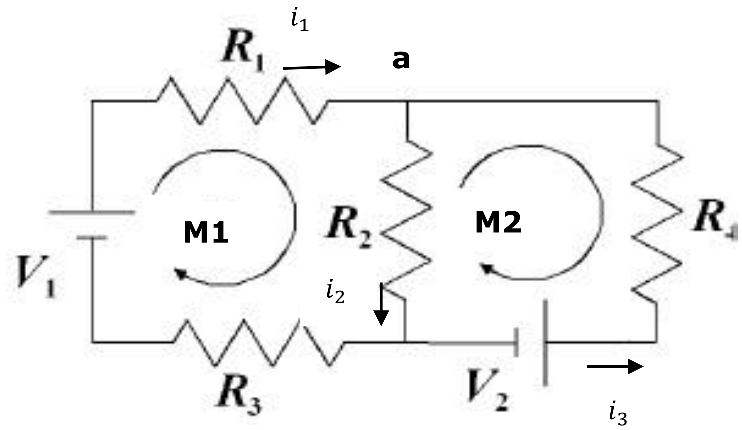
$$-10 i_2 + 12 i_3 = -10$$

$cuya\ solucion\ es$:

$$i_1 = 0.383\ Amp\ ;\ i_2 = 0.663\ Amp\ ;\ i_2 = -0.280\ Amp$$

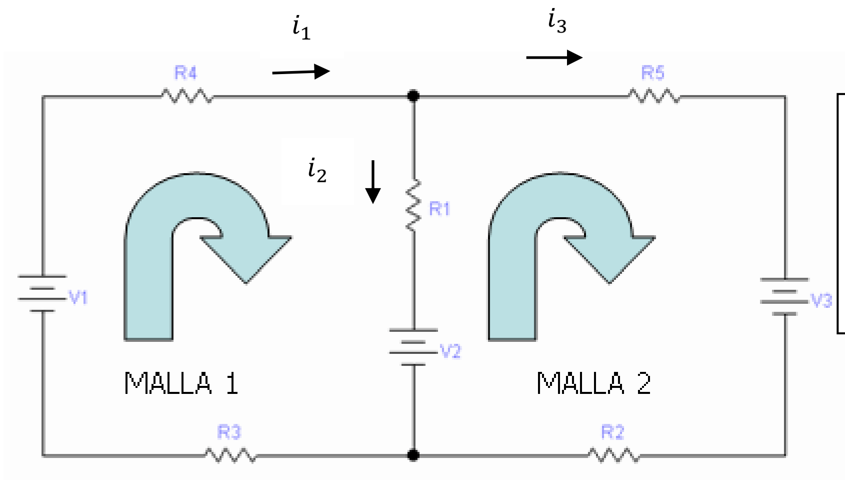
ACTIVIDAD. ENCONTRAR LA CORRIENTE EN LOS SIGUIENTES CIRCUITOS.

A) Ejemplo. Determine las corrientes en el siguiente circuito.



R1=10Ω ; R2=15Ω ; R3=16Ω ; R4=14Ω

V1=20Volt V2= 16Volt



E.

R1=8Ω ; R2=14Ω ; R3=10Ω ; R4=12Ω ; R5=9Ω

V1=12Volt V2= 10Volt V3= 16Volt

3. BALANCEO DE ECUACIONES QUIMICAS.

Las ecuaciones químicas permiten conocer cuales son las sustancias que se combinan para formar productos, esto quiere decir las que se forman. La representación de una ecuación es por medio de la ecuación química, la cual esta constituida por reactivos y productos separados por una flecha. En la ecuación química el número de reactivos que se obtiene debe de ser la misma cantidad que de productos.

Balancear una ecuación es buscar que el número de átomos en el primer miembro con los del segundo se obtenga una igualdad por lo que es importante el uso de coeficientes, pero nunca se deberá alterar los subíndices. La ecuación química balanceada es una ecuación algebraica con todos los reaccionantes en el primer miembro y todos los productos en el segundo miembro por esta razón el signo igual algunas veces se remplaza por un flecha que muestra el sentido hacia la derecha de la ecuación, si tiene lugar también la reacción inversa, se utiliza la doble flecha de las ecuaciones en equilibrio.

EJEMPLO. Balancear por el método algebraico la ecuación química.

$$\mathbf{C_8H_{18} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O}$$

Se deben buscar coeficientes x , y z , w de tal manera que las cantidades de entrada de cada elemento sea igual a la cantidad de salida, para ello tenemos en cuenta la ecuación escrita en la forma:

$$\mathbf{xC_8H_{18} + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O}$$

Multiplicando los coeficientes con los subíndices, se tiene:

$$8x = z$$

$$18x = 2w$$

$$2y = 2z + w$$

Resolviendo el sistema se llega a que: z= 8x ; w=9x ; y= 25x/2, como se necesitan números enteros hacemos x=2 con el fin de eliminar el denominador de y, siendo la solución x=2 ; y = 25 ; z= 16 ; w = 18 , de donde la ecuación balanceada es:

$$\mathbf{2C_8H_{18} + 25O_2 \rightarrow 16CO_2 + 18H_2O}$$

Balancear la ecuación química

$$CO_2 + \ H_2O \overrightarrow{luz\ solar}\ \ C_6H_{12}O_6 + O_2$$

Se deben buscar coeficientes x , y z , w de tal manera que las cantidades de entrada de cada elemento sea igual a la cantidad de salida, para ello tenemos en cuenta la ecuación escrita en la forma:

$$xCO_2 + \ yH_2O \overrightarrow{luz\ solar}\ z\ C_6H_{12}O_6 + wO_2$$

Multiplicando los coeficientes con los subíndices, se tiene:

$$x = 6z$$

$$2x + y = 6z + 2w$$

$$2y = 12z$$

Resolviendo el sistema se tiene, x = 6z ; y= 6z ; w= w=6z , teniendo en cuenta que se debe emplear la menor cantidad, haciendo z= 1 , se llega a x= 6 , y = 6 , w = 6 siendo la ecuación balanceada:

$$6CO_2 + 6H_2O \overrightarrow{luz\ solar}\ \ C_6H_{12}O_6 + 6O_2$$

ACTIVIDAD. Balancear algebraicamente las ecuaciones químicas

$$MnO_2 + HCl\ \rightarrow MNCl_2 + Cl_2 + H_2O$$

$$Al(NO_3)_3 + H_2SO_4\ \rightarrow HNO_3 + Al_2(SO_4)_3$$

$$KMnO_4 + HCl\ \rightarrow KCl + Cl_2 + H_2O$$

4 APLICACIONES A MANUFACTURA

Una industria fabrica tres modelos de computadoras personales: A , B y C. Para armar una computadora modelo A se necesitan 12 horas de ensamblado, 2.5 para probarla, y 2 más para instalar sus programas. Para Un modelo B se requieren 10 horas de ensamblado, 2 para probarla, y 2 para instalar programas. Y para Modelo C requiere 6 para ensamblado, 1.5 para probarla, y 1.5 para instalar programas. Si la fábrica dispone en horas por mes de 556 para ensamble, 120 para pruebas, y 103 horas para instalación de programas, ¿cuántas computadoras se pueden producir por mes?

Solución

las incógnitas son el número de cada tipo de computadora a producir:

A = número de computadoras A

B = número de computadoras B

C = número de computadoras C

Para determinar las ecuaciones debemos utilizar los tiempos de ensamblado, pruebas, e instalación de programas.

Ensamblado

$$12A + 10B + 6C = 556$$

Pruebas

$$2.5A + 2B + 1.5C = 120$$

Instalación de programas

$$2A + 2B + 1.5C = 103$$

Luego el sistema lineal a resolver es

$$12A + 10B + 6C = 556$$

$$2.5A + 2B + 1.5C = 120$$

$$2A + 2B + 1.5C = 103$$

Resolviendo el sistema lineal, se obtiene que con el tiempo que dispone la industria se pueden fabricar 34 computadores MODELO A , 4 DEL MODELO B Y 18 DEL MODELO C.